

浙江大学

ZHEJIANG UNIVERSITY

《线性代数（甲）》 历年秋冬学期期中试题合集

题 目 卷

共 9 套 · 84 题

2026 年 9 月 26 日

整理者 macanine@163.com

github.com/macanine/zju-linear-algebra-papers

目录

目录	I
2025–2026 学年秋冬学期（甲）期中	1
2024–2025 学年秋冬学期（甲）期中	6
2022–2023 学年秋冬学期（甲）期中	19
2021–2022 学年秋冬学期（甲）期中	25
2020–2021 学年秋冬学期（甲）期中	31
2019–2020 学年秋冬学期（甲）期中	37
2018–2019 学年秋冬学期（甲）期中	43
2017–2018 学年秋冬学期（甲）期中	47
2016–2017 学年秋冬学期（甲）期中	52

浙江大学

《线性代数（甲）》

2025–2026 学年 秋冬学期 期中考试试卷

填空题（85 分）

1. 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ px_1 + x_2 + 3x_3 - qx_4 = 1 \end{cases}$$

有解，且通解中有 2 个任意常数，则 $p =$ _____， $q =$ _____，方程组的系数矩阵的秩 $r =$ _____，通解为_____。

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & a^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ a+3 & 1-a & a^2+3 \end{pmatrix}$$

则当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 矩阵 A 和 B 不相抵 (或不等价); 当 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 时, 矩阵 A 和 B 的秩都是 2; 当矩阵 A 和 B 的秩都是 3 时, $x_1 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$, $x_3 = \underline{\hspace{2cm}}$ 满足 $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2+3 \end{pmatrix}$ 。

3. 若 $A_{11} = 1$, $A_{21} = 1$, $A_{31} = 1$, $A_{41} = 1$ 是行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & s & t & u \\ 1 & v & w & x \\ 1 & y & z & j \\ 1 & k & h & i \end{vmatrix}$$

的第一列相应元素的代数余子式, 则 $D = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 设 $A_{11} = -8$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 4$, $A_{14} = -4$ 是行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & -1 & 0 & z+1 \\ 1 & -2 & x+3 & 0 \\ -2 & x+1 & 0 & z+3 \end{vmatrix}$$

的第一行相应元素的代数余子式, 则 $x =$ _____, $z =$ _____。

5. 设

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

是矩阵 A 的伴随矩阵, 则当 x _____ 时, 矩阵 A 可逆, 且 $|A| =$ _____。

6. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则 $PAQ^{2025} =$ _____, $P^{1025}AQ^{1000} =$ _____。

7. 矩阵被称为是一个置换矩阵，如果它是由单位矩阵 E 经过一系列的列和行的互换所得。假设矩阵 A 是置换矩阵，则 $A^T A =$ _____。

证明题（15 分）

8. 设 n 阶矩阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ ，如果 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1$ ，证明 $A^2 = A$ 。

9. 设 A, B, C 为 n 阶方阵满足 $r(A) < r(C) \leq n$, 且 $BC = 0$ 。证明存在非零的矩阵 X 满足 $AX = BX$ 。

浙江大学

《线性代数（甲）》

2024-2025 学年 秋冬学期 期中考试试卷

-
1. 设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$, 其中 E 为单位矩阵, 求 B 。

2. 设向量组 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 4)^T$, $\alpha_2 = (1, 1, 1, 1)^T$, $\alpha_3 = (1, 2, 1, 1)^T$, $\alpha_4 = (5, 3, 6, 7)^T$ 。求此向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示。

3. 设四元非齐次线性方程组 $AX = b$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$, $\eta_2 + \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$ ，求该线性方程组的通解。

4. 在欧氏空间中，设有两组基

$$(I): \varepsilon_1 = (1, 1, 1)^T, \varepsilon_2 = (1, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (1, 0, 0)^T;$$

$$(II): \eta_1 = (-5, 2, 1)^T, \eta_2 = (4, -3, 4)^T, \eta_3 = (3, -2, 2)^T.$$

(1) 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵； (2) 用施密特正交化方法将基 (I) 改造成标准正交基。

5. (1) 试证明： n 阶反对称矩阵可逆的必要条件是 n 为偶数； (2) 该条件是充分条件吗？为什么？

6. 解矩阵方程 $AX = A + 2X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 。

7. 求下列向量组的秩和一个极大线性无关组

$$\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2),$$

$$\alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4),$$

$$\alpha_3 = (1, 4, -9, -16, 22),$$

$$\alpha_4 = (7, 1, 0, -1, 3).$$

8. 在线性空间 P^3 中, 设有两组基

$$(I): \varepsilon_1 = (1, 2, 1)^T, \varepsilon_2 = (2, 3, 3)^T, \varepsilon_3 = (3, 7, 1)^T;$$

$$(II): \beta_1 = (3, 1, 4)^T, \beta_2 = (5, 2, 1)^T, \beta_3 = (1, 1, -6)^T.$$

(1) 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵; (2) 若向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $X = (0, 1, -1)^T$, 求 α 在基 (II) 下的坐标。

9. 设 $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ 为二阶实空间 R^2 中的任意两个向量, 问: R^2 对以下所规定的内积是否构成欧氏空间?

(1) $(\alpha, \beta) = a_1 b_2 + a_2 b_1$;

(2) $(\alpha, \beta) = (a_1 + a_2)b_1 + (a_1 + 2a_2)b_2$ 。

10. 设 $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m$, $\cdots$, $\beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1}$, 其中 $m > 1$ 。证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 有相同的秩。

11. 设 A, B 均为 n 阶可逆方阵, 证明: 如果 $A + B$ 可逆, 则 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆方阵。

12. 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

13. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

14. 计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

15. 设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 证明：当 a_1, a_2, a_3, a_4 互异时，此方程组无解；(2) 设 $a_1 = a_3 = k$, $a_2 = a_4 = -k$, 且 $\eta = (-1, 1, 1)^T$ 为此方程组的解，求此方程组的全部解。

16. 试证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n [(x-1)^n - x^n].$$

17. 已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11} - a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21} - a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31} - a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$ 。

18. 问 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解或有无穷解? 在有解时, 求出解。

19. 解线性方程组

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1, \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1$ 。

20. 计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_n \end{vmatrix}.$$

21. 证明：若某行列式的某行元素全为 1，则这个行列式全部代数余子式的和等于该行列式的值。

浙江大学

《线性代数（甲）》

2022-2023 学年 秋冬学期 期中考试试卷

1. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 4 \\ 8 & 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$ 。

2. 已知 $n+1$ 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n+1 \end{vmatrix},$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ 为任意常数, 求

$$4A_1 + 9A_2 + \cdots + (n+1)^2 A_n,$$

其中 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 分别为 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的代数余子式。

3. 求解线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = \lambda^2. \end{cases}$$

4. 用初等行变换将矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 13 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & 21 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ **化简成行阶梯形矩阵** B , **使** B **的阶梯头为** 1。

5. 设 r 为自然数。

(1) 叙述秩的定义；

(2) 证明： $r(A) \leq r$ 当且仅当 A 中 $r+1$ 阶子式（若有）均为 0；

(3) 设 A 通过一次行倍加得到 B ，求证： $r(B) = r(A)$ 。

6. 设有 $n (\geq 2)$ 阶方阵 A , A^* 为 A 的伴随矩阵, 证明:

$$(1) \ r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n, \\ 1, & r(A) = n-1, \\ 0, & r(A) < n-1; \end{cases}$$

$$(2) \ (A^*)^* = |A|^{n-2}A;$$

$$(3) \ \text{若 } r(A) > 0, \text{ 则 } (A^*)^* = A \text{ 当且仅当 } |A|^{n-2} = 1.$$

7. 设 A, C, D 均为 $m \times n$ 阶矩阵, B, D 均为 $n \times s$ 阶矩阵, 证明: $r(AB-CD) \leq r(A-C) + r(B-D)$ 。

8. 设 A 为 2022^{2022} 阶方阵，用数学归纳法证明：

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall m \in \mathbb{Z}^+, \quad (n+1)r(A^2) \leq r(A^{n+2}) + mr(A).$$

浙江大学

《线性代数（甲）》

2021–2022 学年 秋冬学期 期中考试试卷

1. (15 分) 设有下列 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & -6 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 7 & -6 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 7 \end{vmatrix}.$$

(1) 计算 D_1, D_2 ;

(2) 假设当 $n \leq k$ 时有 $D_n = \frac{6^{n+1} - 1}{5}$, 证明: $D_{k+1} = \frac{6^{k+2} - 1}{5}$ 。

2. (10 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 矩阵 A 满足方程 $BA = B^T B$, 求 $|A^* - 2E|$ 。

3. (10 分) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = A$, 证明: $r(A) + r(A - E) = n$ 。

4. (20 分) 设有四元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

- (1) 写出该方程组的系数矩阵 A ;
- (2) 利用初等行变换将矩阵 A 化为阶梯形矩阵 U ;
- (3) 求 $r(A)$;
- (4) 写出该方程组的通解。

5. (10 分) 设实方阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 且 $|A| > 0$, 已知矩阵 B 满足 $AB = E + 3A$, 求矩阵 B 。

6. (25 分) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 。求

(1) A^2 ;

(2) A^3 ;

(3) A^{100} ;

(4) A^{-1} ;

(5) 一个三次实系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 使得 $f(A)$ 为三阶零方阵。

7. (10 分) 设有 n 阶实方阵 $A = (a_{ij})$ 满足：当 $i = j$ 时, $a_{ij} = 2021$ ；当 $i < j$ 时, $a_{ij} = i^j$ ；当 $i > j$ 时, $a_{ij} = (i + j)!$ 。证明： $|A| \neq 0$ 。

8. (10 分) 设 A 为 n 阶方阵, 且 $r(A) = r > 0$ 。证明存在秩为 r 的实方阵 B 和 C , 使得 $AB = CA$ 。

浙江大学

《线性代数（甲）》

2020–2021 学年 秋冬学期 期中考试试卷

1. (10 分) 设

$$D_n = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix},$$

试证明: $D_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ 。

2. (10 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, 三阶方阵满足方程 $2BA + CB = O$, 其中 O 为三阶零方阵, 试求 $|A + 3E|$ 。

3. (15 分) 设有实方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & t & 9 \end{pmatrix}$, 其中 t 为实常数, 已知 B 为三阶非零方阵且满足 $BA = O$, 其中 O 为三阶零方阵, 试求 t 的值以及 B 的秩的可能取值。

4. (15 分) 设 a, b, c 为实常数, 且满足 $b^2 \neq ac$, $a + b + c = 0$, 试证明线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + c = 0, \\ bx_1 + cx_2 + a = 0, \\ cx_1 + bx_2 + b = 0 \end{cases}$$

有唯一解并求出这个唯一解。

5. (15 分) 设方阵 A 的伴随矩阵为 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$, 已知矩阵 B 满足 $AB = B + 3A$,

试求矩阵 B 。

6. (20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$ 。求

(1) 一个二次实系数多项式 $f(x) = x^2 + ax$ 使得 $f(A)$ 为二阶零方阵;

(2) A^{100} ;

(3) $(A + E)^3$;

(4) $(A + E)^{-1}$ 。

7. (8 分) 设 A, B 是两个 n 阶实方阵, 试证明: $r(A) = r(AB)$ 当且仅当存在 n 阶实方阵 C 使得 $A = ABC$ 。

8. (7 分) 设 A 为 n 阶方阵, 试证明: 存在对称矩阵 S 和可逆矩阵 P 使得 $A = SP$ 。

浙江大学

《线性代数（甲）》

2019–2020 学年 秋冬学期 期中考试试卷

1. (10 分) 设有下列 n 阶行列式:

$$D_n = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 & 4 \end{vmatrix},$$

试证明: $D_n = (1+n)2^n$ 。

2. (10 分) 设 $\alpha = (1, 0, -1)^T$, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T$, 又设 n 为一正整数, 试求 $|2E - (A^*)^n + A^n|$ 。

3. (15 分) 设有实方阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 6 \\ -3 & 1 & -7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 2 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 其中 a, b 为实常数。已知 $r(A) = r(B)$, 且线性方程组 $AX = (b, 1, 0)^T$ 有解, 试求 a, b 的值。

4. (20 分) 当实数 a 取何值时线性方程组

$$\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ ax_2 - 3ax_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + (a+1)x_3 = 0 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷解？有解时请求出所有解。

5. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ k & k & k & k \end{pmatrix}$, 其中 k 为实常数, 试求 A 的秩 $r(A)$ 。

6. (20 分) 设 A, B 为 n 阶方阵, 试证明:

(1) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;

(2) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$;

(3) 设 P 是一个 n 阶可逆矩阵, 则有 $\operatorname{tr}(P^{-1}AP) = \operatorname{tr} A$;

(4) 若 $A = E_{ij}$, 其中 E_{ij} 是第 i 行第 j 列处的元素为 1、其余元素全部为零的 n 阶方阵, 试求 $\operatorname{tr} A$ 。

7. (5 分) 设 A 是一个 n ($n \geq 2$) 阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵。若存在 n 维非零列向量 α 使得 $A\alpha = \theta$, 其中 θ 为 n 维零列向量, 且非齐次线性方程组 $A^*X = \alpha$ 有解, 试证明: $r(A) = n - 1$ 。

8. (5 分) 设 A 为 n 阶可逆矩阵, α, β 为两个 n 维列向量, 试证明: $|A + \alpha\beta^T| = |A| + \beta^T A^* \alpha$ 。

浙江大学

《线性代数（甲）》

2018–2019 学年 秋冬学期 期中考试试卷

1. (15 分)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 + x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n + x \end{vmatrix}.$$

2. (15 分) 设 $\sigma = (i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是一个 n 阶排列, $A = [a_{ij}]$ 是一个 n 阶方阵, 并且 A 中元素满足: 对于每个固定 r , 当 $j = i_r$ 时, $a_{rj} = 1$, 否则 $a_{rj} = 0$, 求 $|A|$ 。

3. (15 分) 问: 当 λ 取什么值时, 方程组无解? 唯一解? 无穷多解? 有解时求解。

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 1. \end{cases}$$

4. (15 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, 求矩阵方程: $AX = A + 2X$ 。

5. (15 分) 设 A 为 4 阶反对称矩阵, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 证明: $E + AB$ 可逆。

6. (10 分) 设 A 为 n 阶实对称矩阵 ($n > 1$), $|A| = 0$, 证明: $A_{ij}A_{ji} = (A_{ij})^2, (i, j = 1, 2, \dots, n)$ 。

7. (7 分) $A, B \in P^{n \times n}$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}$, 证明: $R(M) \geq R(A+B) + R(A-B)$ 。

8. (8 分) 设 $A, B \in P^{n \times n}$, 满足 $B = E + AB$, 证明: $AB = BA$ 。

浙江大学

《线性代数（甲）》

2017–2018 学年 秋冬学期 期中考试试卷

1. (15 分) 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ z & x & y & \cdots & y \\ z & z & x & \cdots & y \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ z & z & z & \cdots & x \end{vmatrix},$$

x, y, z 为任意实常数。

2. (20 分) 设 k 为实常数, 当 k 为何值时, 下面线性方程组无解? 唯一解? 无穷多解? 有解时, 求解。

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = k - 3, \\ x_1 + kx_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + kx_3 = -2. \end{cases}$$

3. (20 分) 求矩阵方程

$$X \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. (15 分) 设 $R(A_{m \times n}) = r$, 证明存在 $B_{n \times n}$, 且 $R(B) = n - r$, 使得 $AB = 0$ 。

5. (15 分) 设 $R(A_{n \times n}) = 1$, $A_{n \times n} \in P^{n \times n}$, 证明:

- (1) 存在两组不全为零的实数 $a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n$, 使得 $A = (a_1, \dots, a_n)^T (b_1, \dots, b_n)$;
- (2) 存在实数 k , 使得 $A^2 = kA$ 。

6. (8 分) 设 $A_{m \times n} X_{n \times 1} = d_{m \times 1}$ 有解, $B_{m \times s} X_{s \times 1} = c_{m \times 1}$ 无解, 令 $G = (ABdc)_{m \times (n+s+2)}$, 证明: $R(G) \leq R(A) + R(B) + 1$ 。

7. (10 分) 设 $A, B, C, D \in R^{n \times n}$, 证明: 当 $AC = CA$ 时, 有 $\begin{vmatrix} A & D \\ C & B \end{vmatrix} = |AB - CD|$ 。

浙江大学

《线性代数（甲）》

2016–2017 学年 秋冬学期 期中考试试卷

1. (10 分) 试计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & x^2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & x^3 \end{vmatrix}.$$

2. (15 分) 解齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = 1, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 7, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$$

3. (15 分)

(1) 试叙述矩阵秩的定义。

(2) 设 λ 可取任意参数，试求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & \lambda+4 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩。

4. (15 分) 试求解矩阵方程 $AXB = C$ 的解, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. (15 分) 已知 $A^*BA = 2BA - 12E$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, 求 B 。

6. (15 分) 试证明 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}$ 可逆并求其逆, 这里 A, B 分别为 r 阶和 s 阶可逆矩阵。

7. (15 分)

- (1) 试证明对矩阵 A 实施一次初等行变换等价于用相应的初等矩阵左乘 A 。
- (2) 试证明方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$ 。