2022-2023 学年云峰学园第一党支部微积分（甲）I 期中模拟试题

时间：120 分钟，满分：100 分

命题：杨立　　校对：裘博文

1. 计算下列极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\dfrac{x}{2}}$. (6 分)

2. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{3^x-1}=5$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.(7 分)

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}}$.(8 分)

4. 设 $x_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{16}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^{2^n}}\right)$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.(8 分)

5. 确定 a, b 的值使得函数 $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \geq 0, \\ x + x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处可导，并讨论导函数连续性.(10 分)

6. 设 $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctan \dfrac{y}{x}$, 求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.(10 分)

7. 设 $y = y(x)$ 是方程组 $\begin{cases} x = 3t^2 + 2t + 3; \\ e^y \sin t - y + 1 = 0; \end{cases}$ 确定的隐函数. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.(10 分)

8. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(2x+\pi)}{2\cos x}, x\le 0\\ \sin\dfrac{1}{x^2-1}, x>0\end{cases}$ 的连续性，若有间断点请指出并指出类型.(10 分)

9. 设 $f(x)=\arctan\dfrac{1-x}{1+x}$, 求 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$.(8 分)

10. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.(8 分)

11. 设 $x_1 = 2,\ x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$, 证明 $\{x_n\}$ 极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.(8 分)

12. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 恒正，且对任意实数 x, y 有 $\dfrac{f(x)+f(y)}{2} \leq f(\dfrac{x+y}{2})$. 证明 $f(x)$ 恒为常数.(7 分)