2023-2024 学年云峰学园第一党支部微积分（甲）I 期中模拟试题

时间：120 分钟，满分：100 分

命题：杨立

1. 计算下列极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-2e^{x}+1}{\sqrt[3]{\cos x}-1}$. (8 分)

2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin(\pi\sqrt{4n^2+1})$. (8 分)

3. 试确定 a,b,c 的值, 使得极限式 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a(x-1)^2+b(x-1)+c-\sqrt{x^2+3}}{(x-1)^2}=0$ 成立. (8 分)

4. (1) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left|1-2+3-\cdots+(-1)^{n+1}n\right|$;

   (2) 求正整数 n, 使得 $n<6(1-1.001^{-1000})<n+1$. (10 分)

5. 已知曲线的极坐标方程为 $r = 1 - \cos\theta$.(10 分)

(1) 写出曲线的名称及其直角坐标下的方程.

(2) 求曲线上对应 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 处的切线与法线的直角坐标方程.

(3) 设直角坐标下直线 $x = k$ $(k > 0)$ 与给定曲线相切, 写出 k 的值.

6. 记 $y = x^{2^x} + (\tan 2x)^{\cot\frac{x}{2}} - \operatorname{arccot} 3x + \arccos\dfrac{1}{x} + e^{\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$ $\left(x > 1,\ \tan 2x > 0,\ \sin\dfrac{x}{2} \neq 0\right)$, 求 y'. (10 分)

7. 设 $\begin{cases} x = t^2 - t; \\ y^3 + 3ty + 1 = 0 \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{t=0}$. (10 分)

8. 讨论函数 $f(x)=\dfrac{(x+1)|x-1|}{e^{\frac{1}{x-2}}\ln|x|}$ 的所有间断点并指出其为第几类间断点，最后回答哪些属于可去间断点，哪些属于跳跃间断点. (10 分)

9. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n+k+\sqrt{k}}{n^2+k}$. (6 分)

10. 记 $f_n(x)=x^n\ln x$, 求 $f_n^{(n)}(x)$ 并证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}$ 存在. (6 分)

11. 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, $g(x)$ 在 (a,b) 内有定义, 且 $g(x)>0$, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 (a,b) 内任意 n 个点. 证明: 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)g(x_i)=f(\xi)\sum\limits_{i=1}^{n}g(x_i)$.(5 分)

12. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0, x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. (5 分)

13. (Toeplitz 定理) 设对任意 $n,k\in\mathbb{N}^+$,$t_{nk}>0$ 且 $\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}=1,\lim\limits_{n\to\infty}t_{nk}=0$. 若给定数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$($A$ 为常数). 令 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}t_{nk}a_k, n\in\mathbb{N}^+$. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.(4 分)