2024-2025 学年云峰学园第一党支部微积分（甲）I 期中模拟试题

时间：120 分钟，满分：100 分

命题：杨立

1. 计算下列极限. (10 分)

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

2. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4+\sqrt[n]{3}}{5}\right)^n$. (8 分)

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt{1-\cos x})-x}{\arctan|x|}$. (8 分)

4. 设 $f(x)=\dfrac{(\sqrt{1+3x}-b)(x-b)}{(x-a)(x-1)}$ 有无穷间断点 $x_1=0$, 可去间断点 $x_2=1$, 求 a,b 的值. (8 分)

5. 设 $y = e^{\tan\frac{1}{x}} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$, 求 y'.(7 分)

6. 设 $y = y(x)$ 是方程 $e^{xy-1} = x + y$ 确定的隐函数, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$. (8 分)

7. 设 $a > 0,\ b \in \mathbb{N}^+,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}(e^{x^a} - 1); & (x > 0) \\ x^b \arctan x; & (x \leqslant 0) \end{cases}$, 试讨论: (10 分)

(1) 当 a, b 取何值时，函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(2) 当 a, b 取何值时，函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求出 $f'(0)$.

8. 设曲线 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = t + \cos t; \\ e^y + ty + \sin t = 1 \end{cases}$ 确定, 且与曲线 $y = g(x)$ 在点 $(1, y(1))$ 处相切, 求: (10 分)

(1) 公切线方程.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot g\left(\dfrac{n+2}{n}\right)$.

9. 设 $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$, 求 $y^{(5)}$. (8 分)

10. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足对于任意实数 x_1, x_2 , 有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$, 且 $f'(0)=1$. 求证: $f'(x)=f(x)$. (6 分)

11. 回答下列问题. (7 分)

(1) 叙述闭区间上连续函数的介值定理.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0)=f(1)$. 求证: 存在数 $c\in[0,\dfrac{2}{3}]$, 使得 $f(c)=f(c+\dfrac{1}{3})$.

12. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n > 0, x_n + \dfrac{4}{x_{n+1}^2} < 3$. 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. (5 分)

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f(1) > 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = A < 0$. 求证: 方程 $f(x)f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个实根. (5 分)