2025-2026 学年云峰学园第一党支部微积分（甲）I 期中模拟试题

时间：120 分钟，满分：100 分

命题：杨立

1. 求极限：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. (6 分)

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos^n(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+1})$. (8 分)

3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\sqrt[n]{\cos 2n\pi x}}{(x-1)(x^x-1)}$. (8 分)

4. 讨论 $f(x)=\dfrac{|x|^x-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的所有间断点，并指出它们是第几类间断点. (8 分)

5. 设 $y=[\arccos x+\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\operatorname{arccot} x}\quad (0<x<1)$, 求 y'.(7 分)

6. 试确定 a, b 使函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}} (x \in \mathbb{R})$ 在 $x = 1$ 处可导.(8 分)

7. 设 $\begin{cases} x = 4t^2 - t; \\ y^3 - 2ty - 8 = 0 \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}\right|_{t=0}$. (10 分)

8. 考虑一条带内环的蜗形线: $r = 2 + 3\cos\theta$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$. (10 分)

(1) 当 $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ 时，求该点的直角坐标 (x, y) 并求出曲线在该点的切线与法线方程（用直角坐标形式给出）.

(2) 求该曲线在何值的 θ 处具有水平切线或竖直切线.

9. 设 $y = (\arcsin x)^2$, 求 $y^{(n)}(0) \quad (n \in \mathbb{N}^+)$. (8 分)

10. 设 $a_n = \dfrac{e}{e^n + 1^2} + \dfrac{e^2}{e^n + 2^2} + \cdots + \dfrac{e^n}{e^n + n^2}$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$. (6 分)

11. 已知 $f(x)$ 在 (a, b) 连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{x-a} \cdot \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{f(x)}{x-b} > 0$, 证明 $f(x)$ 必在 (a, b) 内取到正的最大值和负的最小值. (6 分)

12. 从以下 A/B 两个问题中选择一个作答, 如都作答则取高分计入总分. (5 分)

A. 设函数 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(2x)}{f(x)} = 1$, 则对任意 $m > 0$, 都有 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(mx)}{f(x)} = 1$. 若你认为该命题正确，给出证明，否则给出反例.

B. 设函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是连续函数，且 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = f(x)$, 证明: $f(x)$ 是常值函数.

13. 设方程 $e^x + x^{2n+1} = 0$ 有实根 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$.(5 分)

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在并求其值, 记为 a.

(2) 证明 $x_n - a$ 与 $\dfrac{1}{n}$ 在 $n \to \infty$ 时是同阶无穷小量.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上有连续的三阶导数, 且 $f(-1) = 0, f(1) = 1, f(0) = 0, f'(0) = 0$, 在以下 (1)(2) 两小问中选择一个作答, 如都作答则取高分计入总分. (5 分)

(1) 证明: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $\xi f''(\xi) + (1 + \xi) f'(\xi) = 1 + \xi$.

(2) 证明: 存在 $\eta \in (-1, 1)$ 使得 $f'''(\eta) = 3$.