

## 微积分（甲）I 期中模拟试卷

考试时间：120 分钟

### 1. 求极限：（12 分）

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[ \left( \frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]; \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - \sin x + 1} + \sqrt{x^2 + \sin x + 1}}.$$

### 2. 求极限：（12 分）

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} n \tan(\pi \sqrt{n^2 + 2026}); \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (n^k + 1)^{-1/k}.$$

3. 若极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^3 + ax^2 + x} + bx^{3/2}}{\sqrt{cx+1}}$  存在，求  $a, b, c$  满足的条件并求该极限值。（10 分）

4. 讨论  $f(x) = \frac{e + e^{1/x}}{e - e^{1/x}} \cdot \frac{x^2 - 1}{\sin(x + 1)}$  的所有间断点, 并指出它们是第几类间断点。(10 分)

5. 化简  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x[x]e^{nx}}{1 + e^{nx}}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), 分析  $f(x)$  的连续性和可导性, 其中  $[x]$  表示对  $x$  向下取整。(10 分)

6. 设  $\begin{cases} x = t^2 + t, \\ e^{t+y} + ty - 1 = 0 \end{cases}$  确定函数  $y = y(x)$ , 求  $\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$ 。(10 分)

7. 设  $f_n(x) = (x - \pi)^n e^{2x} \cos x$ , 求  $f_n^{(n)}(\pi)$  ( $n \in \mathbb{N}_+$ )。 (8 分)

8. 已知心形线  $r = 2(1 + \cos \theta)$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), 是否存在曲线上的一点, 该点处的切线和极半径垂直。若存在, 求出该点坐标和该点处切线的方程 (均在直角坐标系下给出); 若不存在, 请说明理由。 (8 分)

9. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $[a, b]$  上的一个点列, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{f(x_k)}}$ 。 (5 分)

10. 从以下 A/B 两个问题中选择一个作答，如都作答则取高分计入总分。(5 分)

A. 设  $f(x)$  连续,  $f'(0)$  存在。对于任意  $x, y \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - 4f(x)f(y)}.$$

证明  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上可导。

B. 设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为常数, 记

$$f(x) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx, \quad g(x) = \sum_{j=1}^n a_{n-j+1} \sin jx.$$

已知  $|f(x)| \leq |\sin x|$ ,  $|g(x)| \leq |\sin x|$ , 求证

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \frac{2}{n+1}.$$

【提示: 考虑  $f'(0), g'(0)$ 。】

11. 已知数列  $\{x_n\}$  满足  $x_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $\sin x_n = x_n \cos x_{n+1}$ 。(5 分)

(1) 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在并求其值。

(2) 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\cos x_{n+1})^{1/x_n^2}$ 。

**12.** 设函数  $f(x)$  满足对于任意  $x \in [a, b]$ , 都有  $f(x) \in [a, b]$ 。且存在常数  $k \in (0, 1)$ , 对于任意  $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 都有  $|f(x_2) - f(x_1)| \leq k|x_2 - x_1|$ 。证明: (5 分)

(1) 存在唯一  $\xi \in [a, b]$  使得  $f(\xi) = \xi$ 。

(2) 对于任意  $x_0 \in [a, b]$ , 定义  $x_{n+1} = f(x_n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ )。证明  $\{x_n\}$  收敛且  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$ 。

**附加题.** 设奇函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  上二阶可导, 证明: 存在  $\xi \in (-1, 1)$  使得  $f''(\xi) - f'(\xi) + f(1) = 0$ 。(5 分)