

2024-2025 学年秋冬《线性代数（甲）》期中

练习版·题目卷

姓名：_____

日期：_____

根据归档题目重新排版，非原卷扫描件。题号及已注明分值沿用归档；未注明的考试时长和分值不作补充。

1.

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ ，且 $ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$ ，其中 E 为单位矩阵，求 B 。

2.

设向量组 $\alpha_1 = (2, -1, 3, 4)^T$ ， $\alpha_2 = (1, 1, 1, 1)^T$ ， $\alpha_3 = (1, 2, 1, 1)^T$ ， $\alpha_4 = (5, 3, 6, 7)^T$ 。求此向量组的秩和一个极大线性无关组，并将其余向量用此极大线性无关组线性表示。

3.

设四元非齐次线性方程组 $AX = b$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量，且 $\eta_1 = (2, 3, 4, 5)^T$ ， $\eta_2 + \eta_3 = (1, 2, 3, 4)^T$ ，求该线性方程组的通解。

4.

在欧氏空间中，设有两组基

$$(I): \varepsilon_1 = (1, 1, 1)^T, \varepsilon_2 = (1, 1, 0)^T, \varepsilon_3 = (1, 0, 0)^T;$$

$$(II): \eta_1 = (-5, 2, 1)^T, \eta_2 = (4, -3, 4)^T, \eta_3 = (3, -2, 2)^T.$$

(1) 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵；(2) 用施密特正交化方法将基 (I) 改造成标准正交基。

5.

(1) 试证明: n 阶反对称矩阵可逆的必要条件是 n 为偶数; (2) 该条件是充分条件吗? 为什么?

6.

解矩阵方程 $AX = A + 2X$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 。

7.

求下列向量组的秩和一个极大线性无关组

$$\alpha_1 = (6, 4, 1, -1, 2), \quad \alpha_2 = (1, 0, 2, 3, -4),$$

$$\alpha_3 = (1, 4, -9, -16, 22), \quad \alpha_4 = (7, 1, 0, -1, 3).$$

8.

在线性空间 P^3 中, 设有两组基

$$(I): \varepsilon_1 = (1, 2, 1)^T, \varepsilon_2 = (2, 3, 3)^T, \varepsilon_3 = (3, 7, 1)^T;$$

$$(II): \beta_1 = (3, 1, 4)^T, \beta_2 = (5, 2, 1)^T, \beta_3 = (1, 1, -6)^T.$$

(1) 求基 (I) 到基 (II) 的过渡矩阵; (2) 若向量 α 在基 (I) 下的坐标为 $X = (0, 1, -1)^T$, 求 α 在基 (II) 下的坐标。

9.

设 $\alpha = (a_1, a_2)$, $\beta = (b_1, b_2)$ 为二阶实空间 R^2 中的任意两个向量, 问: R^2 对以下所规定的内积是否构成欧氏空间?

(1) $(\alpha, \beta) = a_1 b_2 + a_2 b_1$;

(2) $(\alpha, \beta) = (a_1 + a_2)b_1 + (a_1 + 2a_2)b_2$ 。

10.

设 $\beta_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m$, $\beta_2 = \alpha_1 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_m$, $\cdots$, $\beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{m-1}$, 其中 $m > 1$ 。
证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 有相同的秩。

11.

设 A, B 均为 n 阶可逆方阵, 证明: 如果 $A + B$ 可逆, 则 $A^{-1} + B^{-1}$ 也可逆, 并求其逆方阵。

12.

解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 + 4x_4 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 8x_3 + 7x_4 = -1, \\ x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$$

13.

计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}.$$

14.

计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix}.$$

15.

设有线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + a_1 x_2 + a_1^2 x_3 = a_1^3, \\ x_1 + a_2 x_2 + a_2^2 x_3 = a_2^3, \\ x_1 + a_3 x_2 + a_3^2 x_3 = a_3^3, \\ x_1 + a_4 x_2 + a_4^2 x_3 = a_4^3. \end{cases}$$

(1) 证明：当 a_1, a_2, a_3, a_4 互异时，此方程组无解；(2) 设 $a_1 = a_3 = k$, $a_2 = a_4 = -k$, 且 $\eta = (-1, 1, 1)^T$ 为此方程组的解，求此方程组的全部解。

16.

试证明

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \cdots & 1 & 2 \\ x & x & x & \cdots & x & 1 \end{vmatrix} = (-1)^n [(x-1)^n - x^n].$$

17.

已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$, 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 4a_{11} - a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & 4a_{21} - a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & 4a_{31} - a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}$ 。

18.

问 a, b 取何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ -x_2 + (a-3)x_3 - 2x_4 = b, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + ax_4 = -1 \end{cases}$$

无解, 有唯一解或有无穷解? 在有解时, 求出解。

19.

解线性方程组

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_1, \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + x_3 + \cdots + x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1$ 。

20.

计算 $n+1$ 阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b_n \end{vmatrix}.$$

21.

证明：若某行列式的某行元素全为 1，则这个行列式全部代数余子式的和等于该行列式的值。