

## 2025-2026 学年秋冬《线性代数（甲）》期中

## 练习版·题目卷

姓名：\_\_\_\_\_

日期：\_\_\_\_\_

根据归档题目重新排版，非原卷扫描件。题号及已注明分值沿用归档；未注明的考试时长和分值不作补充。

## 填空题（85 分）

1.

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1, \\ px_1 + x_2 + 3x_3 - qx_4 = 1 \end{cases}$$

有解，且通解中有 2 个任意常数，则  $p =$  \_\_\_\_\_， $q =$  \_\_\_\_\_，方程组的系数矩阵的秩  $r =$  \_\_\_\_\_，通解为 \_\_\_\_\_。

2.

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & a^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ a + 3 & 1 - a & a^2 + 3 \end{pmatrix}$$

则当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时，矩阵  $A$  和  $B$  不相抵（或不等价）；当  $a =$  \_\_\_\_\_ 时，矩阵  $A$  和  $B$  的秩都是 2；当矩阵  $A$  和  $B$  的秩都是 3 时， $x_1 =$  \_\_\_\_\_， $x_2 =$  \_\_\_\_\_， $x_3 =$  \_\_\_\_\_ 满

足  $A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a^2 + 3 \end{pmatrix}$ 。

3.

若  $A_{11} = 1, A_{21} = 1, A_{31} = 1, A_{41} = 1$  是行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & s & t & u \\ 1 & v & w & x \\ 1 & y & z & j \\ 1 & k & h & i \end{vmatrix}$$

的第一列相应元素的代数余子式, 则  $D =$  \_\_\_\_\_。

4.

设  $A_{11} = -8, A_{12} = 0, A_{13} = 4, A_{14} = -4$  是行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ x & -1 & 0 & z+1 \\ 1 & -2 & x+3 & 0 \\ -2 & x+1 & 0 & z+3 \end{vmatrix}$$

的第一行相应元素的代数余子式, 则  $x =$  \_\_\_\_\_,  $z =$  \_\_\_\_\_。

5.

设

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

是矩阵  $A$  的伴随矩阵, 则当  $x$  \_\_\_\_\_ 时, 矩阵  $A$  可逆, 且  $|A| =$  \_\_\_\_\_。

6.

设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则  $PAQ^{2025} = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $P^{1025}AQ^{1000} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

7.

矩阵被称为是一个置换矩阵, 如果它是由单位矩阵  $E$  经过一系列的列和行的互换所得。假设矩阵  $A$  是置换矩阵, 则  $A^T A = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

证明题 (15 分)

8.

设  $n$  阶矩阵  $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$ , 如果  $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1$ , 证明  $A^2 = A$ 。

9.

设  $A, B, C$  为  $n$  阶方阵满足  $r(A) < r(C) \leq n$ , 且  $BC = 0$ 。证明存在非零的矩阵  $X$  满足  $AX = BX$ 。