

Exercise 2-1 Answer

7.

(3) 设

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 1 \\ 2x^3 + 1 & x > 1 \end{cases},$$

求 $f'(1)$ 。

解

先验证 $f(1) = 3$, 且左右极限都等于 3, 所以 f 在 $x = 1$ 处连续。由左右差商,

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{3(1+h)^2 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (6 + 3h) = 6,$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2(1+h)^3 + 1 - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (6 + 6h + 2h^2) = 6.$$

故 $f'(1) = 6$ 。

(4) 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

求 $f'(0)$ 。

解

由导数定义,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin\left(\frac{1}{h}\right).$$

因为 $|h \sin(\frac{1}{h})| \leq |h| \rightarrow 0$, 由夹逼定理得

$$f'(0) = 0.$$

(5) 设 $f(x) = x + (x-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 求 $f'(1)$ 。

解

在 $x = 1$ 的邻域内, 记 $g(x) = \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}}$, 则

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2},$$

$$f'(x) = 1 + g(x) + (x-1)g'(x).$$

代入 $x = 1$, 得到

$$f'(1) = 1 + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

11.

设 f 在 x 处可导, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = f'(x).$$

并说明该极限存在不能反推出 f 在 x 处可导。

证明

令 $h_n = \frac{1}{n}$, 则 $h_n \rightarrow 0^+$ 。由导数定义及数列极限性质,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = f'(x).$$

反向不成立。取狄利克雷函数

$$D(t) = \begin{cases} 1 & t \in \mathbb{Q} \\ 0 & t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}.$$

因为 $\frac{1}{n}$ 是有理数, $x + \frac{1}{n}$ 与 x 同为有理数或同为无理数, 故

$$D\left(x + \frac{1}{n}\right) = D(x), \quad n \left[D\left(x + \frac{1}{n}\right) - D(x) \right] = 0.$$

所以给定数列差商的极限处处存在, 且恒为 0; 但是 D 处处不连续, 因而处处不可导。

12.

求 $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{2}$ 的导数。

解 当 $x \neq 0$ 时, 利用幂函数求导公式,

$$y' = -\frac{2}{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}.$$

16.

求 $y = (x^2 - 1) \sin x + x \cos x$ 的导数。

解

$$y' = 2x \sin x + (x^2 - 1) \cos x + \cos x - x \sin x$$

$$y' = x \sin x + x^2 \cos x.$$

20.

求 $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ 的导数。

解

$$y' = -(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{-2} = -\frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

24.

求 $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ 的导数。

解

$$y = 1 - \frac{2}{\tan x + 1},$$

$$y' = \frac{2}{\cos^2 x (\tan x + 1)^2} = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

28.

求 $y = \sin(2x + 3)$ 的导数。

解

$$y' = 2 \cos(2x + 3).$$

32.

求 $y = \tan x - \frac{1}{3} \tan^3 x + \frac{1}{5} \tan^5 x$ 的导数。解 当 $\cos x \neq 0$ 时,

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} x [1 - \tan^2 x + \tan^4 x] = \frac{\tan^4 x - \tan^2 x + 1}{\cos^2 x}.$$

36.

求 $y = \sin^2(\frac{x}{2}) + \cos^2(\frac{x}{2})$ 的导数。解 由三角恒等式, $y = 1$, 故 $y' = 0$ 。

40.

求 $y = \sqrt{1 + 3 \cos^2(4x)}$ 的导数。

解

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{1 + 3 \cos^2(4x)}} \cdot 3 \cdot 2 \cos(4x) \cdot (-4 \sin(4x))$$

$$y' = -\frac{12 \sin(4x) \cos(4x)}{\sqrt{1 + 3 \cos^2(4x)}} = -\frac{6 \sin(8x)}{\sqrt{1 + 3 \cos^2(4x)}}.$$

44.

求 $y = x^2 \sqrt{1-x}$ 的导数。解 当 $x < 1$ 时,

$$y' = 2x\sqrt{1-x} - \frac{x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x(1-x) - x^2}{2\sqrt{1-x}} = \frac{4x - 5x^2}{2\sqrt{1-x}}.$$

48.

求 $y = e^{2x+3}$ 的导数。

解

$$y' = 2e^{2x+3}.$$

52.

求 $y = \tan(\frac{x}{2}) + \ln \tan(\frac{x}{2}) + \sqrt{\ln \tan(\frac{x}{2})}$ 的导数。解 在 $\tan(\frac{x}{2}) > 1$ 的区间内逐层求导,

$$\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2 \cos^2(\frac{x}{2})},$$

$$\left(\ln \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\tan(\frac{x}{2})} \cdot \frac{1}{2 \cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{1}{\sin x}.$$

因此

$$y' = \frac{1}{2 \cos^2(\frac{x}{2})} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2 \sin x \sqrt{\ln \tan(\frac{x}{2})}}.$$

56.

求 $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 的导数。

解 对任意 $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$, 且

$$y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}}.$$

$$y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$$

$$y' = \sqrt{1+x^2} - x + x - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

60.

求 $y = \arcsin(\frac{1}{x})$ 的导数。

解 当 $|x| > 1$ 时, 由链式法则,

$$y' = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}.$$

64.

求 $y = (\frac{a}{b})^x + (\frac{b}{x})^b + (\frac{x}{a})^a$ 的导数, 其中 a, b 为正常数, $x > 0$ 。

解

$$y = \left(\frac{a}{b}\right)^x + b^b x^{-b} + a^{-a} x^a.$$

因此

$$y' = \ln\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^x - b^{b+1} x^{-b-1} + a^{1-a} x^{a-1}.$$

68.

求 $y = (\ln x)^x$ 的导数。

解 取 $x > 1$, 则底数 $\ln x > 0$ 。两边取对数,

$$\ln y = x \ln(\ln x).$$

对 x 求导,

$$\frac{y'}{y} = \ln(\ln x) + x \cdot \frac{1}{x \ln x} = \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}.$$

所以

$$y' = (\ln x)^x \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right]$$

$$y' = (\ln x)^x \ln(\ln x) + (\ln x)^{x-1}.$$

73.

设 $y = f(\varphi^2(x) + \psi^2(x))$, 求 y' 。

解

$$y' = f'(\varphi^2(x) + \psi^2(x))[2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\psi(x)\psi'(x)].$$

76.

由 $x + y + \sin y = 2$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 y' 。解 两边对 x 求导,

$$1 + y' + \cos y \cdot y' = 0.$$

当 $1 + \cos y \neq 0$ 时,

$$y' = -\frac{1}{1 + \cos y}.$$

78.

由 $y \sin x - \cos(x - y) = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 y' 。解 两边对 x 求导,

$$y' \sin x + y \cos x + \sin(x - y)(1 - y') = 0.$$

整理得

$$[\sin x - \sin(x - y)]y' = -y \cos x - \sin(x - y).$$

当分母不为零时,

$$y' = \frac{y \cos x + \sin(x - y)}{\sin(x - y) - \sin x}.$$

79.

由 $e^x \cos y - e^{-y} \cos x = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 y' 。解 两边对 x 求导,

$$e^x \cos y - e^x \sin y \cdot y' + e^{-y} \cos x \cdot y' + e^{-y} \sin x = 0.$$

所以

$$[e^{-y} \cos x - e^x \sin y]y' = -e^{-y} \sin x - e^x \cos y.$$

当分母不为零时,

$$y' = \frac{e^{-y} \sin x + e^x \cos y}{e^x \sin y - e^{-y} \cos x}.$$

81.

(1) 求曲线 $y = \sin x$ 在点 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处的切线与法线。解 由 $y' = \cos x$, 切线斜率为

$$k = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

切线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

法线斜率为 $-\frac{1}{k} = -\sqrt{2}$, 故法线方程为

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

(3) 求曲线 $e^{xy} - x^2 + y^3 = 0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线与法线。

解 对隐式方程求导,

$$e^{xy}(y + xy') - 2x + 3y^2y' = 0,$$

$$(xe^{xy} + 3y^2)y' + ye^{xy} - 2x = 0.$$

因此

$$y' = \frac{2x - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2}, \quad y'|_{x=0, y=-1} = \frac{1}{3}.$$

切线方程为

$$y + 1 = \frac{x}{3}.$$

法线方程为

$$y + 1 = -3x.$$

82.

(2) 求 $y = x|x(x-1)|$ 的导数, 并讨论分界点处的可导性。

解 按绝对值内的符号分段:

$$y = \begin{cases} -x^3 + x^2 & 0 < x < 1 \\ x^3 - x^2 & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1 \end{cases}.$$

所以在分界点以外,

$$y' = \begin{cases} -3x^2 + 2x & 0 < x < 1 \\ 3x^2 - 2x & x < 0 \text{ 或 } x > 1 \end{cases}.$$

在 $x = 0$, 由导数定义,

$$y'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h(h-1)|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h(h-1)| = 0.$$

在 $x = 1$, $y(1) = 0$, 且

$$y'_-(1) = -3 + 2 = -1, \quad y'_+(1) = 3 - 2 = 1.$$

左右导数不相等, 所以 $x = 1$ 处不可导。

83.

(2) 设

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

求 $f'(x)$ 。

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \left[-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

当 $x = 0$ 时, 由导数定义,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cos\left(\frac{1}{h}\right).$$

因为 $|h \cos(\frac{1}{h})| \leq |h| \rightarrow 0$, 由夹逼定理得 $f'(0) = 0$ 。 综上,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$