Exercise 2-1 Answer

84. $y=\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}$。

两边取对数,

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(a+x)+\ln(b+x)-\ln(a-x)-\ln(b-x)].$$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a+x}+\frac{1}{b+x}+\frac{1}{a-x}+\frac{1}{b-x}\right].$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left[\frac{2a}{a^2-x^2}+\frac{2b}{b^2-x^2}\right]\sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}}.$$

85. $y=x^{\sin x}e^x$。

两边取对数,

$$\ln y=\sin x\ln x+x,\quad \frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}+1.$$

$$\frac{dy}{dx}=\left[\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}+1\right](x^{\sin x}e^x).$$

86. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$。

$$\ln y=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

$$\frac{y'}{y}=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{x}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{x^2+x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

87. $f(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_{n(x)}$。

证明 因为 $\varphi_{i(x)}\neq 0$，两边取对数,

$$\ln f(x)=\ln\varphi_1(x)+\ln\varphi_2(x)+\cdots+\ln\varphi_{n(x)}.$$

对 x 求导,

$$f'\frac{x}{f(x)}=\varphi_{1'}\frac{x}{\varphi_1}(x)+\varphi_{2'}\frac{x}{\varphi_2}(x)+\cdots+\varphi_{n'}\frac{x}{\varphi_{n(x)}}.$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)\left[\varphi_{1'}\frac{x}{\varphi_1}(x)+\cdots+\varphi_{n'}\frac{x}{\varphi_{n(x)}}\right].$$

97. $y=x\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\sqrt{x^2+a^2}$。

$$\frac{dy}{dx}=\ln\Big(x+\sqrt{x^2+a^2}\Big)+x\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\ln\Big(x+\sqrt{x^2+a^2}\Big)+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\Big(x+\sqrt{x^2+a^2}\Big).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

99. $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$。

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$\frac{1}{2}\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}.$$

$$\Rightarrow\frac{x+\frac{y(dy)}{dx}}{x^2+y^2}=\frac{\frac{dy}{dx}x-y}{x^2+y^2}.$$

$$\Rightarrow x+\frac{y(dy)}{dx}=\frac{dy}{dx}x-y\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)(x-y)-(x+y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right)}{(x-y)^2}$$

$$=\frac{2x-(x+y)\frac{-2y}{x-y}}{(x-y)^2}=\frac{2x^2+2y^2}{(x-y)^3}.$$

102. $\sqrt{1+y}\sqrt{y}-\ln(\sqrt{y}+\sqrt{1+y})=x$。

证明

$$\frac{dy}{dx}\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{1+y}}+\frac{dy}{dx}\frac{\sqrt{1+y}}{2\sqrt{y}}-\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2\sqrt{1+y}}\frac{dy}{dx}\right)\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{1+y}}=1.$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}\frac{y+1+y}{2\sqrt{1+y}\sqrt{y}}-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}\right)\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{1+y}}=1.$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}\frac{2y+1}{2\sqrt{1+y}\sqrt{y}}-\frac{1}{2}\frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1+y}}=1.$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}\frac{y}{\sqrt{1+y}\sqrt{y}}=1\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1+y}\sqrt{y}}{y}=\sqrt{\frac{1+y}{y}}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(-\frac{1}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{1}{2y^2}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2y^2}.$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2y^2} = 0.$$

105. $f(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ x^a\sin(\frac{1}{x}) & x>0\end{cases}$。

(1) 由初等函数性质，考虑 $x=0$ 即可。

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x-0}=0.$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^a\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

当 $a>1$，$f'_+(0)=0$。

$$f'(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{a-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x>0\end{cases}.$$

$$f''_-(0)=0.$$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0}\frac{ax^{a-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{a-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(ax^{a-2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)-x^{a-3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

要使 $f''_+(0)=0$，则 $a>3$。综上，$a>3$。

(2) 由 (1)，

$$f''(x)=\begin{cases}0 & x\le 0\\ [a(a-1)x^{a-2}-x^{a-4}]\sin\left(\frac{1}{x}\right)-\left[(2a-3)x^{a-3}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right] & x>0\end{cases}.$$

$$\lim_{x\to 0^-}f''(x)=0=\lim_{x\to 0^+}f''(x).$$

故 $a>4$。

108. 令 $x=\ln t$，化简方程 $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}+e^{2x}y=0$。

$$\frac{dt}{dx}=t,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{t(dy)}{dt}\right)=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}+\frac{t(d^2y)}{dt^2}=\frac{t(dy)}{dt}+\frac{t(d^2y)}{dt^2}.$$

故

$$\frac{t(dy)}{dt}+\frac{t(d^2y)}{dt^2}-\frac{dy}{dt}t+t^2y=0\Rightarrow\frac{t(d^2y)}{dt^2}+t^2y=0.$$

当 $t\neq 0$，$\frac{d^2y}{dt^2}+ty=0$。

112. $y=\frac{1}{x(1-x)}$，求 $y^{(n)}$。

$$y=-\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}=x^{-1}-(x-1)^{-1}.$$

$$y^{(n)}=(-1)^n n!x^{-(n+1)}-(-1)^n n!(x-1)^{-(n+1)}.$$

115. 设 $y=\sin(ax)\sin(bx)$，求 $y^{(n)}$。

$$y=-\frac{1}{2}[\cos(ax+bx)-\cos(ax-bx)]=\frac{1}{2}\cos((a-b)x)-\frac{1}{2}\cos((a+b)x).$$

$$y^{(n)}=\frac{1}{2}(a-b)^n\cos\Big[(a-b)x+\frac{n\pi}{2}\Big]-\frac{1}{2}(a+b)^n\cos\Big[(a+b)x+\frac{n\pi}{2}\Big].$$

Exercise 2-2 Answer

1. $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。

$$dy=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}dx$$

$$=\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)}dx=\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

5. $y=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$。

$$dy=\frac{1}{2a}d[\ln|x+a|-\ln|x-a|]$$

$$=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x-a}\right)dx=\frac{1}{a^2-x^2}dx.$$

7. 设 $y=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$，求 $x=a$、$\Delta x=1$ 时的 dy。

$$dy=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=a}\Delta x=\left[\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}\right]_{x=a}\Delta x=\frac{1}{a^2+1}.$$

10. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$。

$$d\left(x^{\frac{2}{3}}\right)+d\left(y^{\frac{2}{3}}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{3}y^{-\frac{1}{3}}dy+\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}dx=0.$$

$$\Rightarrow dy=\frac{-2x^{-\frac{1}{3}}dx}{y^{-\frac{1}{3}}}=-2x^{-\frac{1}{3}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}dx.$$

11. $y=f(x+y)$。

$$dy=df(x+y)=\frac{df(x+y)}{d(x+y)}d(x+y)=f'(x+y)(1+y')dx.$$

18. $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\cos t-a\cos t+at\sin t}{-a\sin t+a\sin t+at\cos t}=\tan t.$$

假设 $at\neq 0$。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d\tan t}{dx}=\frac{\frac{d\tan t}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\sec^2\frac{t}{at\cos t}=\frac{1}{at}\sec^3 t.$$

20. $\begin{cases}x=f'(t)\\y=tf'(t)-f(t)\end{cases}$，假设 $f''(t)\neq 0$。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{f'(t)-tf''(t)-f'(t)}{f''}(t)=-t.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d(-t)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{1}{f''}(t).$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\frac{\frac{d\left[-\frac{1}{f''}(t)\right]}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{[f''(t)]^2}}{f''(t)}=\frac{1}{[f''(t)]^3}.$$

Chapter 2 Comprehensive Exercises Answer

1. $y^2f(x)+xf(y)=x^2$。

$$2\frac{y(dy)}{dx}f(x)+y^2\frac{df(x)}{dx}+f(y)+\frac{x(df(y))}{dx}\frac{dy}{dx}=2x.$$

$$2yf(x)\frac{dy}{dx}+y^2f'(x)+f(y)+\frac{x(dy)}{dx}f'(y)=2x.$$

$$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y^2f'(x)-f(y)}{2yf(x)+xf'(y)}.$$

4. 设 $\varphi(x)$ 在 a 连续，$f(x)=|x-a|\varphi(x)$。

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\varphi(x)=\varphi(a).$$

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{|x-a|\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a^+}-\varphi(x)=-\varphi(a).$$

故当且仅当 $\varphi(a)=0$ 时，$f'(a)$ 存在且为 0。

10. $f(x)$ 具有一阶连续导数，证明 $F(x)=(1+|\sin x|)f(x)$ 在 $x=0$ 可导当且仅当 $f(0)=0$。

证明 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导，等价于存在极限

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{(1+|\sin x|)f(x)-f(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{|\sin x|f(0)}{x}\right].$$

$$\lim_{x\to0^+}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}+\frac{\sin xf(0)}{x}\right]=f'(0)+f(0).$$

$$\lim_{x\to0^-}\left[\frac{f(x)-f(0)}{x}-\frac{\sin xf(0)}{x}\right]=f'(0)-f(0).$$

则 $f'(0)+f(0)=f'(0)-f(0)\Rightarrow f(0)=0$。

12. $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)=g(a)$，$f'(a)>g'(a)$。证明存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a)$，$f(x)<g(x)$。

证明 记 $h(x)=f(x)-g(x)$。

$$h'(x)=f'(x)-g'(x),\quad h'(a)=f'(a)-g'(a)>0.$$

由导数定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $x\in(a-\delta,a)$，

$$h'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}>0.$$

因为 $x\in(a-\delta,a)$ 时 $x-a<0$，所以 $h(x)-h(a)<0$，即

$$h(x) < h(a) = f(a) - g(a) = 0.$$

即 $f(x) < g(x)$ 成立。

14. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + \alpha x + \beta}{1 + e^{n(x-1)}}$。

i）$x > 1$，$e^{x-1} > 1$，$f(x) = x^2$。

ii）$x = 1$，$e^{x-1} = 1$，$f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{2}$。

iii）$x < 1$，$f(x) = \alpha x + \beta$。

由 $f(x)$ 连续可导，

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 = f(1) = \frac{1 + \alpha + \beta}{2} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \alpha + \beta.$$

则 $\alpha + \beta = 1$。 而 $f'_+(1) = \alpha$，$f'_-(1) = 2$，故 $\alpha = 2$，$\beta = -1$。

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 1 \\ \alpha & x > 1 \end{cases}.$$