

56 (2) A 是 n 阶方阵且 $r(A)=1$, 证明存在常数 C 使得 $A^2=CA$ 成立.

pf. 由 (1), $A = \alpha \beta^T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$A^2 = \alpha \beta^T \alpha \beta^T = \alpha (\beta^T \alpha) \beta^T \quad \text{设 } \beta^T \alpha = C$$

$$\text{则 } A^2 = C \alpha \beta^T = CA \quad \square$$

(3) 设 A 是一个二阶方阵, 证明: 如果存在正整数 $k \geq 2$ s.t. $A^k = O$, 则 $A^2 = O$

设 $P, Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 可逆

$$\therefore |A| = 0$$

$$\therefore |A| = 0, \text{ 即 } r(A) < 2 \Rightarrow r(A) = 0 \text{ 或 } 1$$

(i) $r(A) = 0$ 即 $A = O$, 显然成立.

(ii) $r(A) = 1$ 由 (2), $\exists C$, s.t. $A^2 = CA$

$$\text{则 } A^3 = CA^2 = C^2A; \quad A^4 = C^2A^2 = C^3A, \dots$$

$$\text{由数学归纳法, } A^k = C^{k-1}A = O$$

$$\therefore A \neq O$$

$$\therefore C = O, \quad A^2 = CA = O. \quad \square$$

57 $A \in \mathbb{R}^{s \times n}$, 证明

(1) 如果 $s \leq n$, 且 $r(A) = s$, 那么必有 $n \times s$ 矩阵 B s.t. $AB = E_s$

pf. 设 $P \in \mathbb{R}^{s \times s}$, $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 P, Q 可逆

则 A 可表示为

$$A = P \begin{bmatrix} E_s & 0 \end{bmatrix} Q \quad \text{取 } B = Q^{-1} \begin{bmatrix} E_s \\ 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$\text{即有 } AB = E_s$$

(2) 如果 $n \leq s$ 且 $r(A) = n$, 必有 $C \in \mathbb{R}^{n \times s}$, s.t. $CA = E_n$

设 $P \in \mathbb{R}^{s \times s}$ $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 P, Q 可逆

$$A = P \begin{bmatrix} E_n \\ 0 \end{bmatrix} Q \quad \text{取 } C = Q^T [E_n \ 0] P^{-1}$$

有 $CA = E_n$ 满足题意

56. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 秩为 r , 证明: 存在秩为 r 的 $m \times r$ 矩阵 B 和秩为 r 的 $r \times n$ 矩阵 C ,

$$\text{s.t. } A = BC.$$

pf. $\exists P \in \mathbb{R}^{m \times m}, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 P, Q 可逆

$$A = P \begin{bmatrix} E_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} Q$$

$$= P \begin{bmatrix} E_r \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix} [E_r \ 0_{r \times (n-r)}] Q$$

$$\text{取 } B = P \begin{bmatrix} E_r \\ 0_{(m-r) \times r} \end{bmatrix}, \quad C = [E_r \ 0_{r \times (n-r)}] Q \quad \text{即可}$$

61. A 是 n 阶方阵. 证明: $A^2 = E_n \Leftrightarrow r(E_n - A) + r(E_n + A) = n$

pf. " $\Rightarrow$ " 若 $A^2 = E_n$, 则 $E_n^2 - A^2 = (E_n - A)(E_n + A) = 0$

$$\text{则 } 0 = r[(E_n - A)(E_n + A)] \geq r(E_n - A) + r(E_n + A) - n$$

$$\Rightarrow r(E_n - A) + r(E_n + A) \leq n$$

$$r(E_n - A) + r(E_n + A) \geq r(2E_n) = n$$

$$\text{故 } r(E_n - A) + r(E_n + A) = n$$

$$\frac{r}{2}$$

" $\Leftarrow$ " 若 $r(E_n - A) + r(E_n + A) = n$

则 设 $X = E_n - A, Y = E_n + A$

$$\text{则 } r \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} = n$$

由 $X+Y=2E_n$

$$\begin{bmatrix} E & E \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ E & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E_n & Y \\ Y & Y \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } \begin{bmatrix} E & \\ -\frac{1}{2}E & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2E_n & Y \\ Y & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & \frac{1}{2}E \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E_n & 0 \\ 0 & Y - \frac{Y^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\text{故 } r \begin{bmatrix} 2E_n & 0 \\ 0 & Y - \frac{Y^2}{2} \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} = n$$

$$\text{则 } Y - \frac{Y^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2Y = Y^2$$

$$= E_n = A^2$$

b2. A 是 n 阶幂等矩阵, $A^2 = A$ 证明:

$$(1) r(A) + r(E_n - A) = n.$$

$$\text{pf } r(A) + r(E_n - A) \geq r(E_n) = n$$

$$r(A) + r(E_n - A) \leq n + r(A - A^2) = n + r(0) = n$$

$$\text{故 } r(A) + r(E_n - A) = n \quad \square$$

(2) 若 A 可逆则 $A = E_n$

$\because A$ 可逆

$$\therefore A^2 \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E_n \Rightarrow A = E_n$$

b3. 设 $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$. 证明若 $ABC = D$, 则

$$r(A) + r(B) + r(C) \leq 2n$$

$$\text{pf } r(A) + r(B) - n \leq r(AB)$$

$$r(AB) + r(C) - n \leq r(ABC)$$

$$\Rightarrow r(A) + r(B) + r(C) - 2n \leq r(ABC) = 0$$

$$\Rightarrow r(A) + r(B) + r(C) \leq 2n$$

习题 4

$$1. \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\beta = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4] \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$2. A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \beta = -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$$

$$AX = \beta \quad \text{解 } X = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

3(1). 线性无关

$$4. \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ t \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (1) \det[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & t-1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & t-5 \end{vmatrix} = (t-5) \end{aligned}$$

当 $t \neq 5$, $\det[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \neq 0$, 满秩, 线性无关(2). $t=5$, $\det[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = 0$, 非满秩, 线性相关

$$(3) \alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$