

线性代数第一次小测参考答案

第九节

一、给定线性方程组解的讨论与求解

方程组为：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ -x_1 + x_3 + 3x_4 + x_5 = a; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = b. \end{cases}$$

对增广矩阵 $\bar{A}$ 进行初等行变换：

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 3 & 1 & a \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2+r_1 \\ r_3-r_1 \\ r_4-3r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & a+2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -2 & b-6 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\substack{r_3-r_2 \\ r_4+r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & a+2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a+b-4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(1) 当方程组有解时，必须满足系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，即 $r(A) = r(\bar{A})$ 。由行阶梯形矩阵可知，要使方程组有解，必须有：

$$\begin{cases} -a-1=0 \\ a+b-4=0 \end{cases} \implies \begin{cases} a=-1 \\ b=5 \end{cases}$$

因此，当 $a=-1, b=5$ 时，方程组有解。

(2) 当 $a=-1, b=5$ 时，增广矩阵化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的同解方程组为：

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + 3x_4 + x_5 \\ x_2 = 1 - 2x_3 - 4x_4 - 2x_5 \end{cases}$$

令自由未知量 $x_3 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$ (其中 c_1, c_2, c_3 为任意常数), 则方程组的全部解为:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

二、计算 4 阶行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} x-1 & x & 0 & 0 \\ -x & x^2-x & x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 & x^3-x^2 & x^3 \\ 0 & 0 & -x^3 & x^4-x^3 \end{vmatrix}$$

从第 2 列、第 3 列、第 4 列中分别提取公因子 x, x^2, x^3 :

$$D_4 = x \cdot x^2 \cdot x^3 \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 & 0 \\ -x & x-1 & 1 & 0 \\ 0 & -x & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & -x & x-1 \end{vmatrix} = x^6 \Delta_4$$

对于 Δ_4 , 按第一行展开:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (x-1) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ -x & x-1 & 1 \\ 0 & -x & x-1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & -x & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\Delta_3 - (-x \cdot \Delta_2) = (x-1)\Delta_3 + x\Delta_2 \end{aligned}$$

依次计算低阶行列式:

$$\Delta_1 = |x-1| = x-1$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ -x & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^2 - (-x) = x^2 - x + 1$$

$$\Delta_3 = (x-1)\Delta_2 + x\Delta_1 = (x-1)(x^2 - x + 1) + x(x-1) = (x-1)(x^2 + 1) = x^3 - x^2 + x - 1$$

因此:

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= (x-1)(x^3 - x^2 + x - 1) + x(x^2 - x + 1) \\ &= (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1) + (x^3 - x^2 + x) \\ &= x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

最终:

$$D_4 = x^6(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1) = x^{10} - x^9 + x^8 - x^7 + x^6$$

第十节

一、考虑如下的线性方程组

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1, \\ 2x + 3y + az = 3, \\ 3x + 4y + 5z = b. \end{cases}$$

对增广矩阵进行初等行变换:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 3 & 4 & 5 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & a-6 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & b-3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & a-6 & 1 \\ 0 & 0 & 8-2a & b-5 \end{pmatrix} \xrightarrow{-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 6-a & -1 \\ 0 & 0 & 8-2a & b-5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

分类讨论如下: (1) 当 $8-2a \neq 0$ 即 $a \neq 4$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 3$, 方程组有唯一解。由回代得:

$$z = \frac{b-5}{8-2a}$$

$$y = -1 - (6-a)z = -1 - \frac{(6-a)(b-5)}{8-2a}$$

$$x = 1 - 2y - 3z = 3 + (9-2a)z = 3 + \frac{(9-2a)(b-5)}{8-2a}$$

(2) 当 $8-2a=0$ 且 $b-5=0$ 时, 即 $a=4, b=5$ 时, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < 3$, 方程组有无穷多解。此时增广矩阵化为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $z = c$ ($c \in \mathbb{R}$), 则全部解为:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (c \in \mathbb{R})$$

(3) 当 $8-2a=0$ 且 $b-5 \neq 0$ 时, 即 $a=4, b \neq 5$ 时, $r(A) = 2 < r(\bar{A}) = 3$, 方程组无解。

二、计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ -a_2 a_1 & 1 - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & 1 - a_n^2 \end{vmatrix}$$

采用加边法，在左上角加一个 1，右侧加一行 a_i ，下方加一列 0。由于新增的第一列只有左上角为 1，其余为 0，按此列展开后与原行列式值相等：

$$D_n = A_{n+1} := \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 - a_1^2 & -a_1 a_2 & \cdots & -a_1 a_n \\ 0 & -a_2 a_1 & 1 - a_2^2 & \cdots & -a_2 a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -a_n a_1 & -a_n a_2 & \cdots & 1 - a_n^2 \end{vmatrix}$$

将第 1 行的 a_i 倍加到第 $i + 1$ 行 ($i = 1, 2, \dots, n$)，可得：

$$A_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

利用爪形行列式求解，得：

$$D_n = 1 - \sum_{i=1}^n a_i^2$$